Exercise Session 10

Felix Breuer

FS 2024

1 Quiz 1

1. Select the condition for which no example exists and provide examples for the others. Assume f, g are defined on $\mathbb{R}$.

   (a) f and g are not differentiable at 0 but fg is differentiable at 0

   (b) f is not differentiable at 0 but g and $f+g$ are differentiable at 0

   (c) f is not differentiable at 0 but g and fg are differentiable at 0

   Solution with possible examples:

   (a) $f(x) = g(x) = |x|$

   (b) This request is impossible: g us differentiable at 0, hence is $-g$. Since $f+g$ and $-g$ are differentiable, so is $(f+g)-g = f$, a contradiction to the assumption

   (c) $g(x) = 0, f(x) = |x|$

2. If a function $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ is increasing, it is bounded

   True, applying the definition of increasing ($x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$) $f(a)$ is a lower bound and $f(b)$ an upper bound of f on $[a, b]$

2 Wichtige Resultate zur ersten Ableitung, Min/Max finden

Definition: f hat in x_0 ein lokales Maximum, falls $\exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D : f(x) \leq f(x_0)$

Ein wichtiges Resultat erlaubt es uns, Kandidaten für lokale Extremstellen zu finden:

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar.

f nimmt in x_0 ein lokales Maximum (oder Minimum) an $\implies f'(x_0) = 0$

Jedes $x \in (a,b)$, wo $f'(x) \neq 0$ kann somit keine lokale Extremstelle sein.

Aufgabe:
Sei $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x\exp(1/x^2)$

1. Zeige, dass f differenzierbar ist

   $x, \frac{1}{x^2}, \exp(x)$ sind auf $(0,\infty)$ differenzierbar. Mit der Kettenregel ist $\exp(1/x^2)$ differenzierbar, durch die Produktregel auch $f(x) = x\exp(1/x^2)$.

2. Finde Mögliche Kandidaten für Extremstellen von f

   Da f auf einem offenen Intervall definiert ist, gilt für alle möglichen lokalen Extrema, dass $f'(x) = 0$. Wir berechnen $f'(x) = \exp(1/x^2)(1 - \frac{2}{x^2}) = 0 \iff 1 - \frac{2}{x^2} = 0 \iff x^2 = 2$. Diese Gleichung wird für $x > 0$ nur für $x = \sqrt{2}$ erfüllt.

3. Bestimme, ob die gefundene Stelle ein lokales/globales Minimum/Maximum ist (ohne Verwendung der zweiten Ableitung)

   $f'(x) = \exp(1/x^2)(1 - \frac{2}{x^2})$ ist negativ für $x < \sqrt{2}$ und positiv für $x > \sqrt{2}$. Somit ist f für $x < \sqrt{2}$ strikt monoton fallend, für $x > \sqrt{2}$ strikt monoton steigend, womit $f(\sqrt{2}) \leq f(x)$ für alle $x \in (0,\infty)$ gilt. Somit hat f bei $\sqrt{2}$ ein globales Minimum.

3 Satz von L'Hospital

Seien f, g differenzierbar auf $(a,b), g'(x) \neq 0 \forall x \in (a,b)$

Falls $\lim_{x\to a^+} |g(x)| = \lim_{x\to a^+} |f(x)| = \infty$ oder $\lim_{x\to a^+} g(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = 0$, gilt folgende Implikation:

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \implies \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Anmerkungen:

- a^+ könnte man mit b^-, $c \in (a,b)$ oder $\pm\infty$ ersetzen
- $L \in \mathbb{R}$ oder $L = \pm\infty$

Beispiele:

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0$

2. $\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$. Wir schreiben die Funktion um: $x^{1/x} = \exp(\ln(x^{1/x})) = \exp(1/x\ln(x))$. Mit Stetigkeit von exp und 1) erhalten wir $\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = \lim_{x\to\infty} \exp(1/x\ln(x)) = \exp(\lim_{x\to\infty} 1/x\ln(x)) = \exp(0) = 1$

3. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \cos(0) = 1$

Aufgaben:
Berechne folgende Grenzwerte mithilfe des Satz von L'Hospital

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{\cos x - 1}$$

$$\lim_{x\to -\infty} x^3 e^x$$

Hier ist es notwendig, den Grenzwert erst in eine geeignete Form (einen Bruch) zu bringen, um den Satz von L'Hospital anwenden zu können. Ein typisches Beispiel für so eine Situation ist $f(x)x = \frac{f(x)}{1/x}$.

$$\lim_{x\to -\infty} x^3 e^x = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3}{e^{-x}}$$

Intuition:

Wenn f, g beide gegen 0 oder $\pm\infty$ konvergieren, zählt nahe am Grenzpunkt nur die Änderungsrate/Steigung/Ableitung.

4 Stetigkeit der Ableitung

Wir haben gesehen, dass f differenzierbar bei x_0 impliziert, dass f bei x_0 stetig ist. Die umgekehrte Implikation gilt nicht (zB. für $|x|$).

Frage: Wenn f differenzierbar ist, ist dann auch f' stetig?

Nein, ein typisches Beispiel ist

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

f ist differenzierbar bei 0,

$$f'(x) = \begin{cases} -\cos(1/x) + 2x\sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

ist bei 0 nicht stetig ($-\cos(1/x)$ oszilliert zwischen 1 und -1 während $2x\sin(1/x)$ gegen 0 konvergiert).

Dennoch hat die Ableitung f' Eigenschaften, die man sonst von stetigen Funktionen kennt

- Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ differenzierbar. Für jedes α zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$ gibt es ein $c \in (a, b)$, sodass $f'(c) = \alpha$ (Darboux's Theorem, Zwischenwerteigenschaft)
- Die Ableitung f' kann nur an Punkten x_0 unstetig sein, wo einer der Grenzwerte $\lim_{x \to x_0^-} f'(x)$ und $\lim_{x \to x_0^+} f'(x)$ nicht existiert oder $\pm\infty$ ist (siehe Quiz 2.4., angenommen linke und rechte Grenzwerte $A, B \in \mathbb{R}$ existieren. Einmal angewandt auf $[0, \infty) \cap I$, einmal auf $(-\infty, 0] \cap I$ erhält man, dass $f'(0) = A = B$). Die Ableitung kann also nicht unstetig aufgrund von Sprüngen im Funktionsgraphen sein, wo rechter und linker Grenzwert an einem Punkt existieren ($\neq \pm\infty$) aber nicht gleich sind (siehe Classification of discontinuities).

5 Quiz 2

1. If a function $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ is continuous, it has local extrema at the endpoints a, b

   False, consider $f(x) = \begin{cases} x \sin(x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

2. If a function $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ is differentiable, it has local extrema at the endpoints a, b

   False, consider $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

   Let I be an interval with more than one point.

3. If f' exists on an interval I and is not constant, f' takes on irrational values

   True

4. If f is differentiable on $I, 0 \in I$ and $\lim_{x \to 0} f'(x) = L$, then $f'(0) = L$

   True. We can prove this via L'Hospital's theorem:

   $f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x'} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{1} = L$