Exercise Session 11

Felix Breuer

FS 2024

1 Quiz

1. $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2^n x)}{2^n}$ ist stetig

   Zuerst zeigen wir mit dem Weierstrass M-Test, dass $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(2^k x)}{2^k}$ gleichmässig konvergiert: $|\frac{\cos(2^n x)}{2^n}| \leq \frac{1}{2^n}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$, somit konvergiert S_n gleichmässig und absolut gegen S. Jedes S_n ist stetig, da $\cos, 2^n, 2^n x$ stetig sind, somit auch die Verknüpfung $\cos(2^n x)$ und der Quotient $\frac{\cos(2^n x)}{2^n}$. Für ein fixes n ist S_n eine (endliche) Summe stetiger Funktionen und somit stetig. Zuletzt gilt, dass wenn $S_n \to S$ gleichmässig und alle S_n stetig sind, auch S stetig ist.

2 Konvexität

Sei $f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$

In der Vorlesung gab es drei Charakterisierungen von Konvexität:

1. $\forall x, y \in D : f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$

   (Definition)

2. $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf (a,b) f (streng) konvex $\iff$ f' (streng) monoton steigend

   (Charakterisierung mit erster Ableitung)

3. $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar auf (a,b)

   $f'' \geq 0 \iff f$ konvex

   $f'' > 0 \implies f$ streng konvex (die andere Richtung gilt nicht, zB. ist x^4 strikt konvex mit zweiter Ableitung 0 bei 0)

   (Charakterisierung mit zweiter Ableitung)

Eine nützliche Eigenschaft von konvexen Funktionen ist, dass jedes lokale Minimum ein globales Minimum ist.

2.1 Jensen's Inequality

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0,1], \sum_{k=0}^{n} \lambda_k = 1$

Dann gilt (Beweis mit Induktion):

$$f(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k) \leq \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

Daraus folgt (für eine endliche Zufallsvariable X): $f(E(X)) \leq E(f(X))$

Aufgabe:
Zeige die AM-GM Ungleichung $\sqrt[n]{(x_1 \cdot \cdots \cdot x_n)} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$ für $x_1, \ldots, x_n > 0$ mithilfe der Konvexität von $-\log$ und Jensens Ungleichung

Lösung:
$-\log$ ist konvex, da $(-\log(x))'' = (-1/x)' = 1/x^2 > 0$ für $x > 0$. Wir wenden Jensen's Ungleichung an:

$$\begin{aligned}
-\log(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}) &\leq -(\frac{1}{n}\log(x_1) + \cdots + \frac{1}{n}\log(x_n)) \\
\log(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}) &\geq \frac{1}{n}\log(x_1) + \cdots + \frac{1}{n}\log(x_n) \\
\exp(\log(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n})) &\geq \exp(\frac{1}{n}\log(x_1) + \cdots + \frac{1}{n}\log(x_n)) \\
\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} &\geq \exp(\frac{1}{n}(\log(x_1 \cdot \cdots \cdot x_n))) \\
\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} &\geq \exp(\log((x_1 \cdot \cdots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}})) \\
\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} &\geq (x_1 \cdot \cdots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}}
\end{aligned}$$

- Satz: Angenommen, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ hat Konvergenzradius ρ.

Dann ist $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ auf $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ differenzierbar und $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1} \; \forall x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$

Aufgabe:
Sei X geometrisch Verteilt mit Parameter $p > 0$. Berechne $E(X)$ mithilfe obigen Satzes

Lösung:
Sei $q = 1 - p$
$E(X) = \sum_{x \in \mathbb{N}} x \cdot P(X = x) = \sum_{k=0}^{\infty} k(1-p)^{k-1} p = p \sum_{k=0}^{\infty} k q^{k-1} = p(\frac{1}{1-q})' = p\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$

3 Höhere Ableitungen

Aufgabe:

- Finde das grösste n, sodass folgende Funktion f n mal stetig differenzierbar ist

  $f(x) = \begin{cases} x^4 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

  Lösung: f ist 3 mal stetig differenzierbar. $f^{(3)}(x) = \begin{cases} 24x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ stetig bei 0 (auch bei 0, da $\lim_{x \to 0} 24x = 0$), aber nicht bei 0 differenzierbar (für $x < 0$ ist jede Ableitung 0, für $x > 0$ leiten wir wie von Polynomen gewohnt x^4 ab. Für $x = 0$ muss man separat überprüfen, ob der Grenzwert in der Definition von Differenzierbarkeit existiert, was bis zur zweiten Ableitung der Fall ist).

- Finde eine Formel für die $n - te$ Ableitung von

  1. $f(x) = x \exp(x)$
  2. $g(x) = x^2 \exp(x)$

  Möglicher Ansatz: ein paar Mal ableiten, versuchen ein Muster zu finden und dann eine Hypothese aufstellen und mit Induktion beweisen.
  Lösung: $f^{(n)}(x) = \exp(x + n)$, $g^{(n)}(x) = \exp(x^2 + 2nx + n(n-1))$

4 Taylorapproximation

- Definition n-tes Taylorpolynom (siehe Vorlesungsnotizen)
- Lagrange-Remainder Theorem (Satz 4.4.5. im Skript und hier)

Beispiel: Wir berechnen das dritte Taylorpolynom von $f(x) = \sin(x)$ bei 0. $f(0) = \sin(0) = 0, f'(0) = \cos(0) = 1, f''(0) = -\sin(0) = 0, f'''(0) = -\cos(0) = -1$.

$$T_3 f(x; 0) = x - \frac{x^3}{6}$$

Aufgabe: Berechne die Taylorpolynome dritter Ordnung bei 0 von:

1. $f(x) = \frac{1}{1-x}$
2. $g(x) = \log(1 + x)$

   Lösung:
   $T_3 f(x; 0) = 1 + x + x^2 + x^3$
   $T_3 g(x; 0) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$