Session 2 Exercises

Felix Breuer

February 2024

1 Quiz

For statements (where no prompt like "Find ..." is given), determine if they are true or false (and why).

1. The empty set is an interval
2. Find the logical negation of the following formula of predicate logic:
   $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n \geq N : \frac{1}{n} < \varepsilon$
   $\equiv \forall \varepsilon : (\varepsilon > 0 \rightarrow (\exists N : N \in \mathbb{N} \wedge \forall n : n \in \mathbb{N} \wedge n \geq N \rightarrow (\frac{1}{n} < \varepsilon)))$
   Alternatively: $\exists T \in \mathbb{N} \, \forall k \in \mathbb{R} : T \geq k$
3. Multiplying $x \in \mathbb{C}$ by $r(\cos\theta + i \sin\theta)$ corresponds to a counterclockwise rotation by θ radians and stretch by r in the complex plane
4. Let $s \in \mathbb{R}$ be an upper bound of $A \subset \mathbb{R}$
   $s = \sup A \iff \forall \varepsilon > 0 \, \exists a \in A : s - \varepsilon < a$
5. Let $A \subset \mathbb{R}, M \in \mathbb{R}$. $\forall a \in A : a < M \implies \sup A < M$
6. Find an example or prove that the statement is never true:
   $A, B \subset \mathbb{R}$ mit $A \cap B = \emptyset, \; \sup A = \sup B, \; \sup A \notin A, \; \sup B \notin B$

2 Grenzwerte bestimmen (mit Beweis)

Folgend sind gängige Ansätze, um Grenzwerte zu bestimmen (mit Beweis). Oft lassen sich diese auch kombinieren!

2.1 Rechenregeln

Idee: Satz 2.1.8. (mehrmals) anwenden

1. $$\frac{1 + 2a_n}{1 + 3a_n - 4a_n^2}$$
2. Bedingungen für Satz müssen erfüllt sein! $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$ wenn (a_n) beschränkt, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ muss separat bewiesen werden

2.2 Abschätzen, Beweis mit Definition

Beweismuster (Definition Lemma 2.1.6. (2)):

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig:

$$|a_n - l| < \cdots < \varepsilon$$

Zurückführung des Problems auf bereits bekannte Grenzwerte wie $\frac{1}{n}$

z.B.: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

$$|\frac{1}{n^2}| = \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

was gilt, da $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Somit konvergiert $\frac{1}{n^2}$ gegen 0.

2.3 Ausdruck vereinfachen (Wurzeltrick, Polynome)

1. Zähler und Nenner bei Quotient von Polynomen durch n^d dividieren, wo d der grösste vorkommende Grad ist

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^5 + 4n^3 + 7}{7n^5 + 7} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{4}{n^2} + \frac{7}{n^5}}{7 + \frac{7}{n^5}} = \frac{1}{7}$$

   mit Satz 2.1.8. mehrmals angewandt

2. Wurzeltrick: Wurzel im Zähler loswerden durch multiplizieren von $(a - b)$ mit $\frac{(a+b)}{(a+b)}$(Recall : $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$)

   $$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n + 1 - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$

   $$\iff 1 < \varepsilon\sqrt{n} \iff 1 < \varepsilon^2 n.$$

2.4 Sandwich-Lemma

Falls $x_n \leq y_n \leq z_n \; \forall n \geq 1$ und $l = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n$, dann gilt $\lim_{n\to\infty} y_n = l$

1. $$\frac{n + \cos n}{n^2 - 1}$$

2. $$\frac{n^k}{n^n}$$

2.5 Satz von Weierstrass für rekursive Folgen

Falls (a_n) von oben beschränkt und monoton steigend ist, konvergiert (a_n) gegen $\sup\{a_n \mid n \geq 1\}$.

(Analog für monoton fallende, von unten beschränkte Folge und $\inf\{a_n \mid n \geq 1\}$)

Idee: Für rekursive Folge (a_n) mit Induktion die Bedingungen für den Satz von Weierstrass beweisen, um anschliessend mit der Annahme, dass (a_n) konvergiert, den Grenzwert beider Seiten zu nehmen und so eine Gleichung in $l = \lim_{n\to\infty} a_n$ zu erhalten, die man nach l auflösen kann.

Beispiel:

$$a_1 = \sqrt{2}, a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$

0. (a_n) wohldefiniert (ggf. mit Induktion, nicht immer erforderlich)
1. Monoton steigend: $a_n \leq a_{n+1} \;\; \forall n \geq 1$ (mit Induktion)
2. Beschränkt: $a_n \leq 2 \;\; \forall n \geq 1$ (mit Induktion)
3. Per Satz von Weierstrass und 0.-2.: $\lim_{n\to\infty} a_n = l \to$ Grenzwert auf beiden Seiten der Rekursionsgleichung nehmen und nach l auflösen

Wir können nicht in Rekursionsgleichung einsetzen und daraus Konvergenz folgern, ohne zuerst Konvergenz z.B. mit Satz von Weierstrass zu beweisen: Folge könnte nicht konvergieren!

$$y_{n+1} = 3 - y_n, y_1 = 1$$

Auflösen von $l = 3 - l$ ergibt $l = \frac{3}{2}$, aber (y_n) konvergiert nicht (wechselt zwischen 2 und 1).