Session 3 Exercises

Felix Breuer

FS 2024

1 Quiz

For statements (where no prompt like "Find ..." is given), determine if they are true or false (and why).

1. For every unbounded sequence, either $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ or $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

   False, consider $(-1)^n$

2. A sequence $(a_n) = ((a_n)_1 \dots (a_n)_d) : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}^d$ converges if and only if for all $i \in \{1 \dots d\}$ $(a_n)_i$ converges

   True, see lecture

3. $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies (a_n)$ monoton fallend

   False, $a_n > 0$ needed as well. Consider $(-1)^n$ or $-1\frac{1}{n}$ as counterexamples

4. For what $c \in \mathbb{R}$ does the following always hold? $\lim_{n\to\infty} |a_n| = c \implies \lim_{n\to\infty} a_n = c$

   For $c = 0$, it holds (try proving it using the reverse triangle inequality!). For other values of c, there are counterexamples, e.g. $(-1)^n$

5. $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0 \implies \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$

   Holds:

   (a) always

   (b) if (a_n) or (b_n) converge

   (b) is correct. Can be proven using Satz 2.1.8.

6. For all $n \in \mathbb{N}$ let $I_n = (a_n, b_n) \neq \emptyset$ (where $a_n, b_n \in \mathbb{R}$) be a sequence of open intervals such that $I_{n+1} \subset I_n$ and $\lim_{n\to\infty} |b_n - a_n| = 0$. Then there exists $c = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ with $c \in \bigcap_{n\geq 1} I_n$

   False, consider $I_n = (0, \frac{1}{n})$. Compare to Satz 2.5.5 (the statement holds for closed intervals)

7. Let $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ be bounded from below and $B = \{b \in \mathbb{R} \mid \text{b is lower bound of A}\}$. Then $\sup B = \inf A$

   True

2 liminf/limsup

Wichtige Fakten: (besonders 5. macht das Konzept intuitiver)

1. Existieren immer für beschränkte Folgen (Satz von Weierstrass)
2. $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup n \to \infty a_n$
3. $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : a_n \in (\liminf_{n\to\infty} a_n - \varepsilon, \limsup_{n\to\infty} a_n + \varepsilon)$ (in Vorlesung bewiesen)
4. $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert $\iff$ beschränkt und $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup n \to \infty a_n$
5. $\liminf_{n\to\infty} a_n$ ist der kleinste Häufungspunkt von a_n, $\limsup_{n\to\infty} a_n$ der grösste (Aufgabe 3.5)
6. $\liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \liminf n \to \infty a_n + b_n$
7. $\limsup_{n\to\infty} a_n + b_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$
8. $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert gegen $c \in \mathbb{R} \iff$ Jede konvergente Teilfolge hat c als Grenzwert (Aufgabe 3.6)

Beispiel: Finde alle Häufungspunkte und $\liminf, \limsup$ folgender Folge ($k \in \mathbb{N}$):

$$a_n = \begin{cases} \sqrt[n]{17} + 1 & n = 3k \\ (-1)^n & n = 3k+1 \\ \frac{7k^5+3k^2}{K5+3} & n = 3k+2 \end{cases}$$

Die Menge aller Häufungspunkte ist $\{-1, 1, 2, 7\}$. (Per Widerspruchsbeweis kann man zeigen, dass es keinen anderen Häufungspunkt geben kann)

3 Hints zu Übungsblatt 3

3.2.: Die Methoden von Woche 2 können hilfreich sein (besonders die ersten 3)

3.3.: Dreiecksungleichung

3.4.: Fallunterscheidung auf n gerade/ungerade

3.5.: Fakt 3 kann verwendet werden, um die Menge aller Häufungspunkte auf das geschlossene Intervall $[\liminf_{n\to\infty} a_n, \liminf_{n\to\infty} a_n]$ einzuschränken (versuche zu beantworten, warum). Wenn wir nun beweisen, dass es eine Teilfolge gibt, die gegen $\liminf a_n$ konvergiert (das Minimum der Menge $[\liminf_{n\to\infty} a_n, \limsup_{n\to\infty} a_n]$), haben wir damit auch gezeigt, dass $\liminf_{n\to\infty} a_n$ der kleinste Häufungspunkt ist.

Eine äquivalente Definition von "c ist Häufungspunkt von $(a_n)_{n\geq 1}$" ist

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \forall N \in \mathbb{N}\, \exists n_k \geq N : |a_{n_k} - c| < \varepsilon$$

(siehe hier für einen Beweis, oder versuche den Beweis selbst. Ich empfehle auf jeden Fall, sich davon zu überzeugen, dass die Definitionen äquivalent sind). Intuitiv sagt diese Definition, dass wir, egal welchen Index N wir betrachten, immer einen mindest so grossen Index n_k finden können, für den a_{n_k} beliebig nah an c ist. Versuche, die Aussage dieser äquivalenten Definition mit $c = \liminf a_n$ zu beweisen!

3.6.: Für die Richtung $\Leftarrow$ kann man einen indirekten Beweis führen (also um $A \to B$ zu beweisen, beweist man stattdessen $\neg B \to \neg A$, was äquivalent ist mit der Definition von $\to$): Man nimmt also an, dass (x_n) nicht gegen c konvergiert und zeigt, dass es dann auch eine konvergente Teilfolge gibt, die nicht gegen c konvergiert.
Mit der Annahme gilt die logische Verneinung der Definition von Konvergenz gegen c. Versuche nun, das und den Satz von Bolzano-Weierstrass zu verwenden.